

Axialsymmetrische Lösungen der magnetohydrostatischen Gleichung mit Oberflächenströmen

Von L. BIERMANN, K. HAIN, K. JÖRGENS und R. Lüst *

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforsch. 12 a, 826—832 [1957]; eingegangen am 11. Juni 1957)

Es werden axialsymmetrische Lösungen der magnetohydrostatischen Gleichung betrachtet, bei denen das Gas einen Torus erfüllt, dessen Querschnitt im allgemeinen kreisförmig angenommen wird. Zur Vereinfachung wird angenommen, daß die elektrischen Ströme nur an der Oberfläche fließen. Für den Fall, daß diese Ströme gegeben sind, wird ein Verfahren angegeben, mit dem das äußere Magnetfeld berechnet werden kann, welches zusammen mit dem durch den gegebenen Strom erzeugten Feld die Grenzbedingungen erfüllt. Dieses Verfahren wird für den Fall rein azimuthaler Ströme mit einer Näherungsmethode und dann exakt durchgeführt. In erster Näherung genügt die Überlagerung eines homogenen Feldes parallel zur Symmetrieachse des Torus. Für den Fall gegebener meridionaler Ströme zeigt sich, daß die Randbedingungen nur durch Überlagerung eines zusätzlichen azimuthalen Stromes erfüllbar sind, zusammen mit einem geeigneten meridionalen äußeren Magnetfeld. Im axialsymmetrischen Fall ist also stets mindestens eine azimuthale Stromkomponente erforderlich.

It is proposed to consider solutions of the magnetohydrostatic equation of axial symmetry in which the plasma is contained in a torus with circular cross-section. For mathematical simplification it is furthermore assumed, that the electric currents flow exclusively at the surface of the plasma. For the case, that these currents are assumed to be given, a method is outlined by which it is possible to calculate the exterior magnetic field which together with the magnetic field produced by the given currents, satisfies the boundary conditions at the surface. This procedure is carried through for the case of purely azimuthal electric currents, first by an approximate method, then by an exact method. To a first approximation it is sufficient to superpose an homogeneous field parallel to the axis of symmetry. For the case that the given currents are in a meridional plane, it is seen, that the boundary conditions can be satisfied only by the superposition of an additional current together with a suitable meridional exterior magnetic field. Therefore in the case of axial symmetry at least one azimuthal component of the electric current is necessary.

1. Allgemeine Diskussion der Lösungen

a) Es sollen untersucht werden die Eigenschaften bestimmter Lösungen der magnetostatischen Gleichung

$$\frac{1}{4\pi} [\mathfrak{B} \operatorname{rot} \mathfrak{B}] + \nabla p = 0, \quad (1)$$

(\mathfrak{B} magnetische Feldstärke, p Gasdruck), die dadurch charakterisiert sind, daß die magnetischen Kraftlinien auf Oberflächen mit den Zusammenhangsverhältnissen eines Ringes verlaufen** und daß die zugehörigen elektrischen Ströme (j Stromdichte, el.-st. E.)

$$j = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathfrak{B} \quad (2)$$

teils sich im Plasma schließen, teils in äußeren Spulen durch angelegte Spannungen aufrechterhalten werden. (Es sollen also keine Ströme zwischen Plasma und äußeren Spulen fließen.)

Im folgenden sollen torusartige Plasma-Konfigurationen betrachtet werden, insbesondere solche von

* Die grundsätzlichen Gedanken dieser Arbeit stammen von L. B.

axialer Symmetrie, die durch entsprechende Magnetfelder mit flächenhaften elektrischen Strömen stationär gehalten werden über Zeiten, die kurz sind gegen $\sigma Q/c^2$ (σ elektrische Leitfähigkeit, el.-st. E.; Q Querschnitt). Ebenen durch die Symmetrieachse (die z -Achse) seien als Meridianebenen bezeichnet, Feldlinien bzw. Stromlinien entlang geschlossener Linien, insbesondere entlang Kreisen um die z -Achse herum als toroidal oder azimuthal. In sich zurücklaufende Magnetfelder, die durch äußere elektrische Ströme erzeugt werden, haben dann bei axialer Symmetrie wesentlich azimuthalen (evtl. noch schraubenförmigen) Charakter.

Explizite Lösungen für die räumliche Verteilung der elektrischen Ströme im Plasma bei den oben genannten Zusammenhangsverhältnissen scheinen in der Literatur nicht vorhanden zu sein, auch nicht in Form hydrodynamischer Analoga.

b) Die elektrischen Ströme im Plasma können auf zwei verschiedene Arten entstehen. Einmal lassen sie sich durch Induktion von außen erzeugen;

** Die Frage, ob die Feldlinien sich schließen oder ergodisch sind, ist hierbei offen gelassen.



so bedeutet eine Kompression des Plasmas durch Erhöhung der Feldstärke des äußeren (azimutalen) Magnetfeldes die Induktion abschirmender meridionaler elektrischer Ströme an der Plasmaoberfläche, während ein induziertes ringförmiges elektrisches Feld azimutale elektrische Ströme im Plasma erregt. Zum andern erzeugt die langsame Diffusion des einmal hergestellten Plasmas durch das Magnetfeld hindurch, die in Zeiten der Ordnung $\sigma Q/c^2$ stattfindet, eine elektrische Spannung, die den elektrischen Strom aufrechterhält, welcher in dem Magnetfeld gemäß Gl. (1) dem Druck des Plasmas das Gleichgewicht hält; im Fall axialer Symmetrie laufen diese elektrischen Ströme z. B. bei azimutalem Magnetfeld in Meridianebenen um die Seele des Plasma-Torus herum.

Da Gl. (1) notwendig erfüllt sein muß, unabhängig von den weiteren Bedingungen, die aus den Forderungen der Stabilität und geringen Teilchenverlusten fließen, liegt es nahe zu fragen, welche Folgerungen sie zuläßt in bezug auf die Geometrie der elektrischen Ströme im Plasma und auf diejenige der äußeren Magnetfelder.

c) Die vorliegende Behandlung nimmt zur mathematischen Vereinfachung an, daß die elektrischen Ströme im Plasma ausschließlich nahe der Oberfläche fließen, derart, daß der elektrische Strom als (divergenzfreier) Flächenstrom j^* angesehen werden darf. Der Druckgradient entartet dann zu einem Drucksprung Δp ; die Richtung dieser Flächenkraft ist entsprechend die der äußeren Normalen n , und aus Gln. (1) und (2) entsteht dann

$$\frac{1}{c} [j^* \times \mathcal{B}] + n \Delta p = 0. \quad (3)$$

Daraus bekommt man (\mathcal{B}_a^*) und (\mathcal{B}_i^*) sind die Werte von \mathcal{B} an der Außen- bzw. Innenseite; alle Werte an der Grenzfläche sind im folgenden durch * bezeichnet:

$$\Delta p = \frac{1}{8\pi} (\mathcal{B}_a^2 - \mathcal{B}_i^2).$$

Die Grenzfläche des Plasmas hat die Zusammenhangsverhältnisse der Oberfläche eines Ringes, im axialsymmetrischen Fall eines solchen von überall gleichem, z. B. kreisförmigem Querschnitt in Meridianebenen. Da \mathcal{B} an der Grenzfläche keine Komponente $\parallel n$ haben darf, ist \mathcal{B} auf der Innenseite („ \mathcal{B}_i^* “) und auf der Außenseite der Grenzfläche („ \mathcal{B}_a^* “) parallel zu ihr. Wenn keine weiteren elektrischen Ströme im Innern des Plasmas fließen, so bedeutet dies $\text{rot } \mathcal{B}_i = 0$. Wenn wir $\nabla p = 0$ im In-

nern voraussetzen, könnten solche elektrischen Ströme in dem hier betrachteten Modell auch nur zu kraftfreien Magnetfeldern gehören; Lösungen der Gleichung $[\mathcal{B} \times \text{rot } \mathcal{B}] = 0$, die auf die hier vorliegenden Verhältnisse passen würden, scheinen aber nicht zu existieren. Die magnetischen Kraftlinien im Plasma können sich also nur um die z -Achse herum schließen und müssen einer wirbelfreien inkompressiblen Strömung durch den Plasmatorus hindurch entsprechen. Im speziellen Fall der axialen Symmetrie ist \mathcal{B}_i wegen $\text{rot } \mathcal{B}_i = 0$ unabhängig von z , aber umgekehrt proportional dem Abstand r von der z -Achse; der magnetische Gesamtfluß durch den Plasmatorus oder $\int \mathcal{B} d\mathbf{s}$ längs einer einzigen Kraftlinie legt dann \mathcal{B}_i eindeutig fest.

Ferner gilt

$$j^* = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{n}(\mathcal{B}_a^* - \mathcal{B}_i^*)]. \quad (4)$$

Wir wollen nun für die folgende Diskussion annehmen, daß j^* gegeben ist, ferner sei \mathcal{B}_i^* , das ja von den durch äußere Ströme erzeugten Magnetfeldern und den abschirmenden elektrischen Strömen an der Plasmaoberfläche abhängt, zunächst $\equiv 0$. Dann legt gemäß Gl. (4) j^* zugleich $\mathcal{B}_a^* (\sim \sqrt{\Delta p})$ fest, z. B. rein azimutales j^* ein rein meridionales \mathcal{B}_a^* und umgekehrt [ein überlagertes wirbelfreies Magnetfeld geht in Gl. (3) nur ein mit seiner Komponente senkrecht zu j^*]. Dies ist noch unabhängig von der Gestalt des Meridianschnitts des Torus.

d) Zu den Aufgaben der Potentialtheorie bestehen nun die folgenden Beziehungen. Außerhalb der Grenzfläche des Plasmas, in einem diese umhüllenden weiteren torusartigen Bereich, besitzt \mathcal{B} wegen $\text{rot } \mathcal{B} = 0$ ein Potential. Es gilt daher die Potentialgleichung nur mit den den äußeren Strömen entsprechenden Singularitäten (bzw. Wirbeln). Dieser torusähnliche Zwischenbereich ist mehrfach zusammenhängend, kann aber durch entsprechende Schnittflächen (etwa in der Ebene $z=0$ und in einer Meridianebene) einfach zusammenhängend gemacht werden. Während nun bei den üblichen potentialtheoretischen Aufgaben auf der ganzen Grenzfläche des einfach zusammenhängend gemachten Gebiets der Potentialverlauf oder die Normalkomponente der Ableitung (oder eine lineare Kombination beider) vorgegeben ist und den gesamten räumlichen Verlauf der Funktion festlegt, sind hier auf der Plasmagrenzfläche sowohl die Normalkomponente ($= 0$) wie auch die Tangentialkomponente der Ableitung

durch Gl. (3) sozusagen gegeben, während der Verlauf an der übrigen Grenzfläche nicht festgelegt ist, und vielmehr die äußereren Bedingungen entsprechend einzurichten sind.

Genauer legt ein rein azimutales j^* [das dann wegen Gl. (3) mit (4) auch überall den gleichen Betrag haben muß] zugleich fest, daß die Tangentialkomponente der Ableitung ($= \mathcal{B}_a^*$) in Meridianebenen liegen und überall denselben Betrag haben muß. Da die Normalkomponente an der Grenzfläche verschwindet, läßt sich, im Prinzip wenigstens, die Lösung nach außen hin integrieren.

Praktisch wird man zunächst das von j^* selbst erzeugte Magnetfeld \mathcal{B}_I ermitteln und dann das äußere Feld \mathcal{B}_{II} so zu bestimmen suchen, daß an der Plasmagrenze $\mathcal{B}_I + \mathcal{B}_{II} = \mathcal{B}_a^*$ wird. Bei azimutalem j^* sind \mathcal{B}_I und \mathcal{B}_{II} rein meridional, und entlang jeder geschlossenen magnetischen Feldlinie läßt sich der gesamte weiter außen liegende Teil des Magnetfeldes durch elektrische Ströme entsprechend Gl. (4) ersetzen (wegen $\operatorname{div} \mathcal{B} = 0$ ist dies nur entlang magnetischer Feldlinien möglich). Diese Lösung wird nachstehend exakt behandelt. Ihr läßt sich noch ein wirbelfreies rein azimutales Magnetfeld beliebiger Stärke überlagern.

Der andere Grenzfall — j^* versuchsweise rein meridional $= j_m^*$ angenommen — ergibt wegen $\operatorname{div} j^* = 0$ zunächst $|j_m^*| \sim 1/r$ und \mathcal{B}_a^* , das nun rein azimutal ist, wegen Gl. (4) ebenfalls dem Betrage nach $\sim 1/r$. Hierbei ist angenommen, daß durch äußere Spulen zunächst ein azimutales Magnetfeld \mathcal{B}_I erzeugt wird, das dann durch j^* im Innern des Torus gerade kompensiert wird. Damit wäre aber Δp auf der Innenseite, von der z -Achse aus gesehen, größer als auf der Außenseite, anstatt rundherum überall gleich zu sein. Nun läßt sich wieder ein Magnetfeld der komplementären Symmetrie, also ein rein meridionales Magnetfeld und rein azimutales j_{az}^* überlagern, welches einen zusätzlichen Druck [$\sim (j_{az}^*)^2$] auf das Plasma ausüben kann. Dieses j_{az}^* wird also hauptsächlich auf der Außenseite des Torus (von der z -Achse aus gesehen) fließen. Das von ihm erzeugte Magnetfeld \mathcal{B}_{II} besitzt natürlich keineswegs die verlangten Eigenschaften an der Plasmaoberfläche, vielmehr muß jetzt ein äußeres meridionales Magnetfeld \mathcal{B}_{III} überlagert werden, derart, daß die Normalkomponente von $\mathcal{B}_{II} + \mathcal{B}_{III}$ an der Oberfläche verschwindet und daß die Tangentialkomponente von $\mathcal{B}_{II} + \mathcal{B}_{III}$ die Randbedingungen Gln. (3) und (4) befriedigt. Als gemeinsamer Zug ergibt sich im

axialsymmetrischen Fall, daß j^* mindestens eine azimutale Komponente und das Magnetfeld \mathcal{B} nahe der Grenzfläche notwendig schraubenförmigen Charakter besitzen müssen.

\mathcal{B}_{II} bzw. \mathcal{B}_{III} liegen in Meridianebenen, mit einer wesentlichen Komponente etwa parallel oder anti-parallel zur z -Achse. Dem äußeren Magnetfeld müssen also u. U. spezielle Bedingungen auferlegt werden, insbesondere dann, wenn Plasmakonfigurationen bestimmter geometrischer Eigenschaften statio-när gemacht werden sollen.

Auch wenn keine axiale Symmetrie vorliegt, gilt für geschlossene magnetische Kraftlinien längs der Grenzfläche

$$\int \mathcal{B}^* d\hat{s} = \text{const}$$

neben der Bedingung (3). Ob auch in diesem Fall eine azimutale Stromkomponente eine notwendige Bedingung darstellt, damit die magnetostatische Gleichgewichtsbedingung erfüllt ist, ist noch nicht geklärt.

2. Näherungsrechnung für das Magnetfeld

a) Im folgenden soll nun die Frage, welche Magnetfelder notwendig sind, um für einen Torus mit axialer Symmetrie und kreisförmigen Querschnitt die Stationaritätsbedingung (1) zu erfüllen, näher untersucht werden. Dabei sei angenommen, daß an der Oberfläche des Torus nur Oberflächenströme in azimutaler Richtung fließen, und daß der Druck im Torus überall der gleiche sei, während er außen verschwinden soll.

Zunächst sei ein Torus zugrunde gelegt, dessen meridionaler Querschnittsdurchmesser $2m$ klein gegenüber dem Abstand a von der Symmetriechse zum Mittelpunkt des meridionalen Querschnitts sei. In diesem Fall sollen die Magnetfelder durch eine Näherungsrechnung bis zur zweiten Ordnung (m/a) bestimmt werden. Im folgenden Abschnitt wird dann noch die exakte Berechnung angegeben werden, ohne daß m klein gegen a sein muß.

Da nur an der Oberfläche des Torus Ströme fließen sollen, gilt also neben

$$\operatorname{div} \mathcal{B} = 0 \quad (5) \quad \text{auch} \quad \operatorname{rot} \mathcal{B} = 0 \quad (6)$$

außerhalb des Torus bis auf Singularitäten, wo sich äußere Spulen befinden. Das Magnetfeld ist daher darstellbar durch ein skalares Potential mit

$$\mathcal{B} = -\operatorname{grad} \Phi, \quad (7)$$

das wegen Gl. (5) der Potentialgleichung

$$\Delta\Phi = 0 \quad (8)$$

genügen muß, wobei Δ der LAPLACE-Operator sei.

Dieses Potential sei nun in zwei Anteile Φ_I und Φ_{II} zerlegt, wobei Φ_I durch die azimutalen Oberflächenströme an der Oberfläche des Torus bestimmt sei, und Φ_{II} so gewählt werden soll, daß die notwendigen Randbedingungen auf der Oberfläche des Torus erfüllt sind (s. Abschn. 1).

Wie in Abschnitt 1 gezeigt wird, muß unter den oben genannten Voraussetzungen die Normalkomponente des Magnetfeldes auf der Torusoberfläche verschwinden, während die Tangentialkomponente dort konstant sein muß. Die Randbedingungen für das magnetische Potential Φ sind also

$$\partial\Phi/\partial n = 0 \quad \text{und} \quad \partial\Phi/\partial t = \text{const}, \quad (9)$$

wenn mit $\partial/\partial n$ bzw. $\partial/\partial t$ die Ableitungen senkrecht zur Oberfläche bzw. tangential zu ihr gemeint sind. Die tangentiale Ableitung liegt im vorliegenden Fall in der Meridianebene.

b) Wir gehen aus von dem magnetischen Potential eines kreisförmigen Stromfadens. Das Potential an einem Punkte P ist proportional dem Raumwinkel, unter dem der Stromkreis von dem Punkte P aus erscheint, und wurde von MINCHIN¹ berechnet. Die exakte Darstellung des magnetischen Potentials ist durch elliptische Integrale gegeben. Wir beschränken uns hier auf die nähere Umgebung des Stromfadens, d. h. daß die Abstände zum Stromfaden klein gegen die des Radius des Stromfadens sind. Dann ist das Potential eines solchen Stromfadens $\delta\Phi_F$ mit der Stromstärke 1 bis zur zweiten Ordnung korrekt gegeben durch

$$\delta\Phi_F = 2\pi - 2\vartheta - L \frac{R}{a} \sin\vartheta + \frac{R}{16a^2} \sin\vartheta \cdot \{(3 - 2L) R \cos\vartheta + 8(L - 1) m \cos\alpha\}. \quad (10)$$

Hierin ist R der Abstand zwischen dem Aufpunkt P und dem Stromfaden am Punkte P' auf der Torusoberfläche, der Winkel ϑ ist $\angle PP'D$, der Winkel α ist $\angle PAO$ (Abb. 1), a der Radius der Torusseile und $L = \ln 8a/R$. Wenn $2m$ der Querschnittsdurchmesser des Torus, Δm der Abstand von P von der Torusoberfläche und α' der Winkel, unter dem PP' von der Torusseile aus erscheint, so ist R und ϑ gegeben durch

$$R = (2m + \Delta m) \sin \frac{1}{2}\alpha' \quad (11a)$$

$$\text{und} \quad \vartheta = \alpha + \frac{1}{2}\alpha' - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\frac{\Delta m}{m} \cotg \frac{1}{2}\alpha'. \quad (11b)$$

($\Delta m'$ von Abb. 1 ist hier Null.)

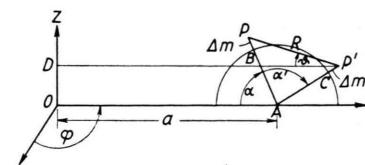


Abb. 1.

Das Gesamtpotential eines mit konstanten azimutalen Oberflächenströmen belegten Torus ist dann gegeben durch

$$\Phi_I = \frac{I_0}{2\pi c} \int_0^{2\pi} \delta\Phi_F d\alpha', \quad (12)$$

wobei I_0 eine Konstante ist und den Strom pro Winkeleinheit angibt. Die Normalkomponente des durch die azimutalen Ströme erzeugten Magnetfeldes ist gegeben durch

$$B_n = -2\pi \frac{\partial}{\partial(\Delta m)} \Phi_I \quad (13a)$$

und die Komponente parallel zur Torusoberfläche durch

$$B_p = -\frac{2\pi}{m} \frac{\partial}{\partial\alpha} \Phi_I. \quad (13b)$$

In nullter Näherung (d. h. unter Vernachlässigung der Krümmung) bekommt man durch Integration unter Benutzung von Gl. (10) und Gl. (11 b) :

$$B_p = \frac{4\pi}{c} \frac{I_0}{m} \quad (14a) \quad \text{und} \quad B_n = 0, \quad (14b)$$

d. h. unter Vernachlässigung der Krümmung sind, wie nicht anders zu erwarten, die Randbedingungen Gl. (9) erfüllt.

In erster Näherung ergibt sich für Φ_I mit Hilfe von Gl. (11 a) und Gl. (11 b)

$$\Phi_I = \Phi_I^{(0)} + \Phi_I^{(1)} \quad (15a)$$

$$\text{mit} \quad \frac{2\pi c}{I_0} \Phi_I^{(0)} = 2\pi(2\pi - 2\alpha) \quad \text{und}$$

¹ G. M. MINCHIN, Phil. Mag. 36, 201 [1893].

$$\begin{aligned} \frac{2\pi c}{I_0} \Phi_1^{(1)} &= \frac{2m+\Delta m}{a} \ln 8a \int_0^{2\pi} \sin \frac{1}{2}\alpha' \cos \left(\alpha + \frac{1}{2}\alpha' + \frac{1}{2} \frac{\Delta m}{m} \cotg \frac{1}{2}\alpha'\right) d\alpha' \\ &- \frac{2m+\Delta m}{a} \ln (2m+\Delta m) \int_0^{2\pi} \sin \frac{1}{2}\alpha' \cos \left(\alpha + \frac{1}{2}\alpha' + \frac{1}{2} \frac{\Delta m}{m} \cotg \frac{1}{2}\alpha'\right) d\alpha' \\ &- \frac{2m+\Delta m}{a} \int_0^{2\pi} \ln (\sin \frac{1}{2}\alpha') \sin \frac{1}{2}\alpha' \cos \left(\alpha + \frac{1}{2}\alpha' + \frac{1}{2} \frac{\Delta m}{m} \cotg \frac{1}{2}\alpha'\right) d\alpha'. \end{aligned} \quad (15 b)$$

Die Ausführung der Integrationen liefert schließlich

$$\frac{c}{I_0} \Phi_1^{(0)} = \frac{m+\Delta m}{a} \left(\ln \frac{m+\frac{1}{2}\Delta m}{8a} + \frac{1}{2} \right) \sin \alpha - \frac{\Delta m}{a} \frac{1}{2} \sin \alpha. \quad (16)$$

Damit bekommt man für das Magnetfeld auf der Torusoberfläche

$$B_p = \frac{4\pi}{c} I_0 \frac{1}{m} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{m}{a} \left(\frac{1}{2} - L^* \right) \cos \alpha \right] \quad (17 a)$$

$$\text{und } B_n = - \frac{4\pi}{c} I_0 \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{2} - L^* \right) \sin \alpha, \quad (17 b)$$

wobei $L^* = \ln 8a/m$ ist.

Man sieht also, daß die Berücksichtigung der Krümmung in erster Ordnung einen Zusatzterm sowohl zur Normal- als auch zur Parallelkomponente des Magnetfeldes liefert, der von $\sin \alpha$ bzw. $\cos \alpha$

$$\frac{c}{I_0} \Phi_1^{(2)} = - \frac{(m+\Delta m)^2}{a^2} \left\{ \ln \frac{m+\frac{1}{2}\Delta m}{8a} + \frac{1}{2} \right\} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \frac{(m+\Delta m)\Delta m}{a^2} \sin 2\alpha - \frac{(m+\Delta m)^2}{a^2} \sin 2\alpha, \quad (19)$$

wodurch sich für das Magnetfeld als Zusatzglieder für die zweite Näherung ergibt

$$B_p^{(2)} = \frac{4\pi}{c} I_0 \frac{m}{a^2} \left(\frac{3}{2} - L^* \right) \cos 2\alpha \quad (20 a) \quad \text{und} \quad B_n^{(2)} = \frac{4\pi}{c} I_0 \frac{m}{a^2} \left(\frac{3}{2} - L^* \right) \sin 2\alpha. \quad (20 b)$$

Die Glieder zweiter Näherung hängen also von $\sin 2\alpha$ bzw. $\cos 2\alpha$ ab und sind durch entsprechende Quadrupolfelder um die Seele des Torus zu kompensieren, so daß die Randbedingungen auch in zweiter Näherung erfüllt werden können.

3. Exakte Berechnung des Magnetfeldes

a) In diesem Abschnitt soll nun die exakte Berechnung des Magnetfeldes eines mit konstanten, azimutalen Oberflächenströmen belegten Torus mit kreisförmigem Querschnitt angegeben werden. Es wird also nicht vorausgesetzt, daß der Querschnittsdurchmesser klein gegenüber dem Abstand von der Symmetrieachse sei. Das durch die Oberflächenströme erzeugte Potential Φ_I setzt sich aus einem Anteil Φ_{Ia} für den Außenraum des Torus und einem

abhängt. Die Randbedingungen Gl. (9) sind zunächst nicht erfüllt, da weder $B_n = 0$ noch $B_p = \text{const}$ auf der Torusoberfläche ist. Aber man erkennt direkt, daß durch Überlagerung eines homogenen Feldes parallel zur Symmetrieachse von der Stärke

$$\frac{4\pi}{c} I_0 \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{2} - L^* \right)$$

die Randbedingungen erfüllt werden können. Das Zusatzpotential Φ_{II} ist also in erster Näherung

$$\Phi_{II}^{(0)} = 0 \quad (18 a)$$

$$\text{und } \Phi_{II}^{(1)} = - \Phi_1^{(1)} \quad (18 b)$$

und ist das Potential eines zur Symmetrieachse parallelen homogenen Magnetfeldes. In zweiter Näherung bekommt man durch entsprechende Integrationen

Anteil Φ_{II} für den Innenraum zusammen. Wegen der an der Oberfläche fließenden Ströme geht aber Φ_{II} nicht stetig in Φ_{Ia} über, sondern, da \mathfrak{B} divergenzfrei ist, gilt dies nur für die Ableitungen in Richtung der Normalen, während die Ableitungen in der Oberfläche senkrecht zum Strom verschieden sind. Es gilt also auf der Oberfläche

$$\frac{\partial}{\partial n} (\Phi_{Ia} - \Phi_{II}) = 0 \quad (21 a)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Phi_{Ia} - \Phi_{II}) = \frac{4\pi}{c} j^*. \quad (21 b)$$

Es sei nun angenommen, daß sich das Potential des Innenraumes Φ_{II} als reguläre Lösung der Potentialgleichung über die Oberfläche hinaus in ein Teilgebiet G des Außenraumes fortsetzen läßt. Die Lö-

sung Φ , des durch Gl. (9) definierten Randwertproblems ist dann gegeben durch

$$\Phi = \begin{cases} 0 & \text{im Inneren des Torus} \\ \Phi_{Ia} - \Phi_{Ii} & \text{in } G \end{cases} \quad (22)$$

denn nach Gl. (21 a) und Gl. (21 b) sind dann gerade die Gln. (9) auf der Oberfläche erfüllt, d. h. also, daß das Zusatzpotential Φ_{II} , das von den äußeren Strömen herrühren muß, durch $-\Phi_{Ii}$ gegeben ist.

b) Hier soll das Potential Φ_I mit einer anderen Methode als in Abschnitt 2 berechnet werden, indem man sich die vom Strom eingeschlossene Fläche mit magnetischen Dipolen belegt denkt. Das Potential bekommt man dann durch entsprechende Integration über diese Fläche (s. hierzu BUCHHOLZ²). Hierfür ist es zweckmäßig, sogenannte Toruskoordinaten ξ , η , φ einzuführen. Sie sind mit den Zylinderkoordinaten ϱ , z , φ auf folgende Weise verknüpft (φ hat in beiden Koordinatensystemen dieselbe Bedeutung):

$$\varrho = \frac{a \sin \eta}{\operatorname{Cof} \eta - \cos \xi}, \quad z = \frac{a \sin \xi}{\operatorname{Cof} \eta - \cos \xi}. \quad (23)$$

Die Kurven $\xi = \text{const}$ und $\eta = \text{const}$ sind Kreise mit ihren Mittelpunkten auf der z -Achse bzw. der Äquatorebene. $u = 2a e^{-\eta}$ ist für kleine Werte von u der

Querschnittsradius eines Torus, der durch die Koordinate η beschrieben wird und dessen Seile einen Abstand a von der Symmetriechse hat. In diesem Fall ist $u = m$ (Abschn. 2) und ξ ist dann proportional zu dem dort eingeführten Winkel α .

Das Potential einer Dipolbeladung der Fläche $\xi' = \text{const}$ $\eta' \leq \eta_0$ mit Dipolstärke 1 ist gegeben durch

$$\Phi_D = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\eta_0} d\eta' \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{Sin} \eta'}{\operatorname{Cof} \eta' - \cos \xi'} \frac{\partial}{\partial \xi'} \frac{a}{R(P, P')} d\varphi'. \quad (24)$$

Hierin ist $R(P, P')$ der Abstand zwischen P und P' . Φ_D ist das Potential eines azimuthalen Stromfadens der Stärke 1 auf der Torusoberfläche $\eta = \eta_0$ an der Stelle ξ' . Das Gesamtpotential Φ_I des azimuthalen Oberflächenstromes der Dichte $I_0 = m j^*$, bezogen auf die Winkeleinheit, ergibt sich daraus durch Integration über ξ' mit dem Gewicht

$$4\pi I_0 \operatorname{Sin} \eta_0 / c (\operatorname{Cof} \eta_0 - \cos \xi').$$

Dazu kommt bei dem Potential Φ_{Ia} des Außenraumes noch ein Term, der daher röhrt, daß der Aufpunkt P die mit Dipolen belegten Flächen $\xi = \text{const}$ durchquert, wobei das Potential jeweils einen Sprung um die Dipolstärke erleidet. Man erhält somit

$$\frac{c}{4\pi I_0} \Phi_{Ia} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{Sin} \eta_0}{\operatorname{Cof} \eta_0 - \cos \xi'} d\xi' \int_0^{\eta_0} d\eta' \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{Sin} \eta'}{\operatorname{Cof} \eta' - \cos \xi'} \frac{\partial}{\partial \xi'} \frac{a}{R(P, P')} d\varphi' - \int_0^{\xi} \frac{\operatorname{Sin} \eta_0}{\operatorname{Cof} \eta_0 - \cos \xi'} d\xi', \quad (24a)$$

$$\frac{c}{4\pi I_0} \Phi_{Ii} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{Sin} \eta_0}{\operatorname{Cof} \eta_0 - \cos \xi'} d\xi' \int_0^{\eta_0} d\eta' \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{Sin} \eta'}{\operatorname{Cof} \eta' - \cos \xi'} \frac{\partial}{\partial \xi'} \frac{a}{R(P, P')} d\varphi'. \quad (24b)$$

Zur Auswertung der Integrale benutzt man die Entwicklungen^{2,3}

$$\frac{\operatorname{Sin} \eta_0}{\operatorname{Cof} \eta_0 - \cos \xi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda \xi} e^{-|\lambda| \eta_0}, \quad (25)$$

$$\frac{1}{(\operatorname{Cof} \eta - \cos \xi)^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda \xi} Q_{\lambda-1/2}(\operatorname{Cof} \eta) \quad (26)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{a}{R(P, P')} &= \left\{ \frac{(\operatorname{Cof} \eta - \cos \xi)(\operatorname{Cof} \eta' - \cos \xi')}{2[\operatorname{Cof} \eta \operatorname{Cof} \eta' - \operatorname{Sin} \eta \operatorname{Sin} \eta' \cos(\varphi - \varphi') - \cos(\xi - \xi')]} \right\}^{1/2} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ (\operatorname{Cof} \eta - \cos \xi)(\operatorname{Cof} \eta' - \cos \xi') \right\}^{1/2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{in(\xi - \xi')} e^{im(\pi + \varphi - \varphi')} Q_{n-1/2}^m(\operatorname{Cof} \eta) P_{n-1/2}^{-m}(\operatorname{Cof} \eta') ; \\ &\quad 0 < \eta' < \eta \end{aligned} \quad (27)$$

² H. BUCHHOLZ, Elektrische und magnetische Potentialfelder, Springer-Verlag, Berlin 1951.

³ A. ERDÉLYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER u. F. G. TRICOMI, Higher Transcendental Functions, McGraw-Hill Book Company, Inc. 1953, Bd. 1, 3.

sowie die folgenden Integrale

$$\frac{1}{\mu+\lambda} A_{\lambda,\mu}(\eta, \eta_0) = \int_0^{\eta_0} d\eta' \operatorname{Si}n \eta' Q_{\mu-1/2}(\operatorname{Co}f \eta') \begin{cases} P_{\lambda-1/2}(\operatorname{Co}f \eta') Q_{\lambda-1/2}(\operatorname{Co}f \eta) & \text{für } 0 < \eta' < \eta, \\ Q_{\lambda-1/2}(\operatorname{Co}f \eta') P_{\lambda-1/2}(\operatorname{Co}f \eta) & \text{für } 0 < \eta < \eta'. \end{cases} \quad (28)$$

Diese ergeben sich zu

$$A_{\lambda,\mu}(\eta, \eta_0) = \frac{1}{\mu-\lambda} \left\{ Q_{\lambda-1/2}(\operatorname{Co}f \eta) - Q_{\mu-1/2}(\operatorname{Co}f \eta) + \operatorname{Si}n \eta_0 \begin{vmatrix} Q_{\lambda-1/2}(\operatorname{Co}f \eta_0), Q_{\lambda-1/2}^1(\operatorname{Co}f \eta_0) \\ Q_{\mu-1/2}(\operatorname{Co}f \eta_0), Q_{\mu-1/2}^1(\operatorname{Co}f \eta_0) \end{vmatrix} P_{\lambda-1/2}(\operatorname{Co}f \eta) \right\} \quad (29 \text{ a})$$

für $\eta < \eta_0$,

$$A_{\lambda,\mu}(\eta, \eta_0) = \frac{1}{\mu-\lambda} \left\{ 1 + \operatorname{Si}n \eta_0 \begin{vmatrix} P_{\lambda-1/2}(\operatorname{Co}f \eta_0), P_{\lambda-1/2}^1(\operatorname{Co}f \eta_0) \\ Q_{\mu-1/2}(\operatorname{Co}f \eta_0), Q_{\mu-1/2}^1(\operatorname{Co}f \eta_0) \end{vmatrix} \right\} Q_{\lambda-1/2}(\operatorname{Co}f \eta) \quad (29 \text{ b})$$

für $\eta > \eta_0$. Für $\mu = \lambda$ sind die Grenzwerte dieser Ausdrücke einzusetzen.

Das Potential der Strombelegung ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} \frac{c}{4\pi I_0} \Phi_{Ia} &= - \int_0^{\xi} \frac{\operatorname{Si}n \eta_0}{\operatorname{Co}f \eta_0 - \cos \xi} d\xi' + \frac{\sqrt{2}}{i\pi} \sqrt{\operatorname{Co}f \eta - \cos \xi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda \xi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-|m|\eta_0} A_{\lambda, \lambda-m}(\eta, \eta_0) \quad (30 \text{ a}) \\ &= - \frac{\sqrt{2}}{i\pi} \sqrt{\operatorname{Co}f \eta - \cos \xi} \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} [e^{i\lambda \xi} Q_{\lambda-1/2}(\operatorname{Co}f \eta)] + \operatorname{Si}n \eta_0 e^{i\lambda \xi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|m|\eta_0}}{m} \begin{vmatrix} Q_{\lambda-1/2}, Q_{\lambda-1/2}^1 \\ Q_{\lambda-m-1/2}, Q_{\lambda-m-1/2}^1 \end{vmatrix}_{\eta=\eta_0} P_{\lambda-1/2}(\operatorname{Co}f \eta) \right\} \end{aligned}$$

für $\eta < \eta_0$ und

$$\begin{aligned} \frac{c}{4\pi I_0} \Phi_{Ii} &= \frac{\sqrt{2}}{i\pi} \sqrt{\operatorname{Co}f \eta - \cos \xi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda \xi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-|m|\eta_0} A_{\lambda, \lambda-m}(\eta, \eta_0) \quad (30 \text{ b}) \\ &= - \frac{\sqrt{2}}{i\pi} \sqrt{\operatorname{Co}f \eta - \cos \xi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda \xi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|m|\eta_0}}{m} \left\{ 1 + \operatorname{Si}n \eta_0 \begin{vmatrix} P_{\lambda-1/2}, P_{\lambda-1/2}^1 \\ Q_{\lambda-m-1/2}, Q_{\lambda-m-1/2}^1 \end{vmatrix}_{\eta=\eta_0} \right\} Q_{\lambda-1/2}(\operatorname{Co}f \eta) \end{aligned}$$

für $\eta > \eta_0$. Aus diesen Darstellungen läßt sich direkt ablesen, daß Φ_{Ia} und Φ_{Ii} der Potentialgleichung genügen und daß die Sprungbedingungen (21 a) und (21 b) erfüllt sind. Die Komponenten des Magnetfeldes in Toruskoordinaten sind

$$\begin{aligned} B_{\xi} &= - \frac{\operatorname{Co}f \eta - \cos \xi}{a} \frac{\partial \Phi_I}{\partial \xi}, \\ B_{\eta} &= - \frac{\operatorname{Co}f \eta - \cos \xi}{a} \frac{\partial \Phi_I}{\partial \eta}, \quad B_{\varphi} \equiv 0. \end{aligned}$$

Die Reihe für Φ_{Ii} [(30 b) zweite Zeile] konvergiert im ganzen Raum außer auf der Symmetrieachse

$\eta = 0$. Aus dem asymptotischen Verhalten der Kugelfunktionen für große Werte des Index folgt nämlich, daß die Terme der Reihe sich asymptotisch wie $e^{-|\lambda|\eta}$ verhalten. Die Reihe stellt also eine reguläre Potentialfunktion dar, die nur auf der Symmetrieachse und im Unendlichen Singularitäten hat. Nach den Ausführungen am Anfang dieses Abschnittes ist daher $\Phi_{II} = -\Phi_{Ii}$ das Zusatzpotential, das durch äußere Ströme erzeugt werden muß.

Wir möchten Herrn Dr. R. KIPPENHAHN für zahlreiche Diskussionen danken.